Exercice 1:

1. oui
2. non
3. oui
4. oui
5. oui si $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et non si $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
6. oui

Exercice 2:

1. $$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ (x+y,0,z,z)=(0,0,0,0)\right\} = \{(x,-x,0,t)\,|\,x,t\in\mathbb{R}\}\\ &= \mathrm{Vect}\left((1,-1,0,0),(0,0,0,1)\right)\end{aligned}$$

   Cette famille est libre, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2. $\mathrm{Im}(f)=\{(x+y,0,z,z)\,|\,x,y,z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\left((1,0,0,0),(0,0,1,1)\right)$.
   Cette famille est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3: On raisonne par double implication.

$\Rightarrow$: Soit $x\in\mathrm{Im}(f)$. $\exists y\in E$ tel que $f(y)=x$. Donc $g(x)=g(f(y))=(g\circ f)(y)=0$.
Donc $x\in\mathrm{Ker}(g)$ donc $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Ker}(g)$.

$\Leftarrow$: Soit $x\in E$. $(g\circ f)(x)=g[f(x)]$. Or, $f(x)\in\mathrm{Im}(f)$ donc $f(x)\in\mathrm{Ker}(g)$ donc $g(f(x))=0$.
Donc, $g\circ f=0$.

Exercice 4: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$.

1. Soit $x\in\mathrm{Ker}(f)$.
   $$f(x)=0\Rightarrow f[f(x)]=f(0)\Rightarrow f^2(x)=0$$
   Ainsi, $x\in\mathrm{Ker}(f^2)$ et donc $\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Ker}(f^2)$.
2. Soit $x\in\mathrm{Im}(f^2)$.
   $$\exists y\in E \text{ tel que } x=f^2(y)\Rightarrow \exists y\in E \text{ tel que } x=f[f(y)]\Rightarrow \exists z=f(x)\in E \text{ tel que } x=f(z)$$
   donc $x\in\mathrm{Im}(f)$ et ainsi $\mathrm{Im}(f^2)\subset\mathrm{Im}(f)$.
3. On démontre de la même manière que
   $$\forall k\in\mathbb{N},\ \mathrm{Ker}(f^k)\subset\mathrm{Ker}(f^{k+1}) \text{ et } \mathrm{Im}(f^{k+1})\subset\mathrm{Im}(f^k)$$

Exercice 5:

- $\mathrm{Ker}(0_{\mathscr{L}(E)})=E$ et $G\subset E$ donc $0_{\mathscr{L}(E)}\in A$, A est non vide.
- Soit $(u,v)\in A^2$. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. On va montrer que $G\subset\mathrm{Ker}(u+\lambda.v)$.
Soit $x\in G$, $(u+\lambda.v)(x)=u(x)+\lambda.v(x)=0$ car $(u,v)\in A^2$. Donc, $G\subset\mathrm{Ker}(u+\lambda.v)$. Ainsi, $u+\lambda.v\in A$.
Donc A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Exercice 6: Soit $\Gamma : \left\{ \begin{array}{l} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto f'' - 2f' + f \end{array} \right.$

1. Soit $(f,g) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(f+\lambda.g)'' - 2(f+\lambda.g)' + (f+\lambda.g) = (f'' - 2f' + f) + \lambda.(g'' - 3g' + g)$$

donc Γ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. Ker(Γ)=$\{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f'' - 2f' + f = 0\}$
Ker(Γ) $= \left\{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = (Ax+B)\mathbf{e}^x\right\} = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathbf{e}^x, x \mapsto x\mathbf{e}^x)$.
Ker(Γ)$\neq \{0\}$ donc Γ n'est pas injective.

Exercice 7: Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f((x,y) + \lambda.(z,t)) &= f((x+\lambda z, y+\lambda t)) = (x+\lambda z + 2(y+\lambda t), x+\lambda z - (y+\lambda t)) \\ &= (x+2y, x-y) + \lambda(z+2t, z-t) = f((x,y)) + \lambda.f((z,t)) \end{aligned}$$

donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
On a $(f(e_1), f(e_2)) = ((1,1),(2,-1))$ et cette famille est libre.
D'où $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((1,1),(2,-1)\right) = \mathbb{R}^2$. Donc f est un endomorphisme surjectif sur un espace de dimension finie, c'est donc un automorphisme.
La famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 8: Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(P+\lambda.Q) = (P+\lambda.Q)(X+1) - (P+\lambda.Q)(X-1) - 2(P+\lambda.Q)(X) = f(P) + \lambda.f(Q)$$

donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
Soit $(1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On sait que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \mathrm{Vect}(-2, 2-2X, 4X-2X^2) = \mathrm{Vect}(1, X-1, X^2-2X)$$

La famille $(1, X-1, X^2-2X)$ est de degrés échelonnés donc libre. Donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$. Par conséquent, f est surjective.
Donc f est un endomorphisme surjectif sur un espace de dimension finie, c'est donc un automorphisme.

Exercice 9: On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & P & \longmapsto & (P(1), P'(1), P''(1)) \end{array}$$

1. À l'aide de la définition et de la linéarité de la dérivation, on montre facilement que Φ est une application linéaire.
Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ alors 1 est au moins racine triple, donc $(X-1)^3 | P$, par un argument de degré $P = 0$. D'où $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$.

2. D'après la question précédente, Φ est injective.
On a $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc l'injectivité implique la bijectivité, d'où Φ est un isomorphisme.

Exercice 10: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$.
On a $\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E - u^3 = (\mathrm{id}_E - u) \circ (\mathrm{id}_E + u + u^2)$.
De plus, les deux derniers termes commutent donc $\mathrm{id}_E - u$ est bijective et admet pour bijection réciproque $\mathrm{id}_E + u + u^2$.

Exercice 11: On a $(f-\mathrm{id}_E)\circ(f+\mathrm{id}_E) = f\circ f - f + f - \mathrm{id}_E = f^2-\mathrm{id}_E$. On a aussi $(f+\mathrm{id}_E)\circ(f-\mathrm{id}_E) = f^2-\mathrm{id}_E$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$.
$(f-\mathrm{id}_E)(x) = 0$ donc $(f+\mathrm{id}_E)((f-\mathrm{id}_E)(x)) = (f+\mathrm{id}_E)(0) = 0$ donc $((f+\mathrm{id}_E)\circ(f-\mathrm{id}_E))(x) = 0$ donc $(f^2-\mathrm{id}_E)(x) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2-\mathrm{id}_E)$
D'où $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2-\mathrm{id}_E)$.
On raisonne de même pour montrer que $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2-\mathrm{id}_E)$.

Exercice 12:

1. Soit $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1.x + \lambda_2.u(x) + \lambda_3.u^2(x) + \ldots + \lambda_n.u^{n-1}(x) = 0$.

   - On compose cette égalité par u^{n-1} :
   $$\lambda_1.u^{n-1}(x) + \lambda_2.u^n(x) + \lambda_3.u^{n+1}(x) + \ldots + \lambda_n.u^{2n-1}(x) = 0$$
   Or, $u^n = 0$ donc il ne reste que le premier terme.
   $$\lambda_1.u^{n-1}(x) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$
   - On reprend l'égalité et on compose par u^{n-2} :
   $$\lambda_2.u^{n-1}(x) + \lambda_3.u^n(x) + \ldots + \lambda_{n-1}u^{2n-2}(x) = 0$$
   Or, $u^n = 0$ donc il ne reste que le premier terme.
   $$\lambda_2.u^{n-1}(x) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0.$$
   - On réitère ainsi le processus et on trouve que tous les coefficients sont nuls donc la famille est libre.

2. Soit $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$.
   $u^n(x) = u(u^{n-1}(x)) = 0$ donc $u^{n-1}(x) \in \mathrm{Ker}(u)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0_E\}$ et u n'est pas injectif.

   Par l'absurde, si u surjectif, alors $u(E) = E$, donc $u^n(E) = E$ ce qui est absurde car $u^n = 0$ n'est pas surjectif, on a donc u non surjectif.

3. Pour $u \in \mathscr{L}(E)$ quelconque:
   $$(\mathrm{id}_E - u)\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} u^k - u\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} u^k - \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1} = u^0 - u^n = \mathrm{id}_E - u^n$$
   Si, de plus, u est nilpotent d'indice n,
   $$(\mathrm{id}_E - u)\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k\right) = \mathrm{id}_E$$
   et
   $$\left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k\right)(\mathrm{id}_E - u) = \mathrm{id}_E$$
   Donc $\mathrm{id}_E - u$ est bijectif et sa bijection réciproque est $\sum\limits_{k=0}^{n-1} u^k$.

Exercice 13: Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \frac{1}{3}(-x+2y, -2x+4y) \end{cases}$.
On a $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$. Calculons f^2, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f^2((x,y)) &= \frac{1}{9}(-(-x+2y) + 2(-2x+4y), -2(-x+2y) + 4(-2x+4y)) \\ &= \frac{1}{9}(-3x+6y, -3x+12y) = f((x,y)) \end{aligned}$$

Donc f est la projection sur $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(f)$.
$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{3}(-x+2y-3x, -2x+4y-3y) = (0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\} = \mathrm{Vect}((1,2))$
$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{3}(-x+2y, -2x+4y) = (0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 2y\} = \mathrm{Vect}((2,1))$

Exercice 14:

1. $q = \mathrm{id}_E - p$ est une combinaison linéaires d'applications linéaires donc $q \in \mathscr{L}(E)$.

$$q \circ q = (\mathrm{id}_E - p) \circ (\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{id}_E - p - p + p \circ p = \mathrm{id}_E - p + p - p = q$$

   donc q est un projecteur de E.

2. On va montrer que $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$ et que $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(p)$.

   $\subseteq$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(q)$. Alors $q(x) = 0 \Rightarrow p(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}(p)$.

   $\supseteq$ Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$: $\exists y \in E,\ p(y) = x$. $q(x) = (\mathrm{id}_E - p)(x) = x - p(x) = p(y) - p(p(y)) = p(y) - p(y) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(q)$.

   Par double inclusion, on a $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$. Par symétrie de q et de p, on a aussi $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 15:

1. $2p \circ 2p = 4p \circ p$. Donc $2p$ est un projecteur si et seulement si $4p = 2p$ si et seulement si $p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2. $(2\mathrm{id}_E - p) \circ (2\mathrm{id}_E - p) = 4\mathrm{id}_E - 2p - 2p + p \circ p = 4\mathrm{id}_E - 3p$. Donc $2\mathrm{id}_E - p$ est un projecteur si et seulement si $4\mathrm{id}_E - 3p = 2\mathrm{id}_E - p$ si et seulement si $p = \mathrm{id}_E$.

3. Supposons que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p)$.
   Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$.
   Donc il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$.
   Or $y \in \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p)$, donc $0 = p(y) = p \circ p(x) = p(x) = y$. D'où $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p) = \{0_E\}$.
   Cela implique que $p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et que $E = \{0_E\}$.

Exercice 16:

1. $f - \mathrm{id}_E$ et $2\mathrm{id}_E - f$ sont des applications linéaires comme combinaisons linéaires d'applications linéaires.

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{id}_E) \circ (f - \mathrm{id}_E) &= f \circ f - f - f + \mathrm{id}_E = 3f - 2\mathrm{id}_E - 2f + \mathrm{id}_E = f - \mathrm{id}_E. \\ (2\mathrm{id}_E - f) \circ (2\mathrm{id}_E - f) &= 4\mathrm{id}_E - 2f - 2f + f \circ f = 4\mathrm{id}_E - 4f + 3f - 2\mathrm{id}_E = 2\mathrm{id}_E - f. \end{aligned}$$

   Ce sont donc bien deux projecteurs.

2. On sait que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$.
   De plus, $f - \mathrm{id}_E + 2\mathrm{id}_E - f = \mathrm{id}_E$ donc on peut appliquer l'exercice 14 avec $p = f - \mathrm{id}_E$.
   Alors, $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E\, \mathrm{Ker}(2\mathrm{id}_E - f)$ donc $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(2\mathrm{id}_E - f)$.

Exercice 17: On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0\right\} \text{ et } L = \text{Vect}\left((1,2,3)\right)$$

Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Analyse : Supposons qu'il existe $(u_H, u_L) \in H \times L$, $u = u_H + u_L$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_L = \lambda(1,2,3)$.
Or $u_H = u - u_L \in H$ d'où $x - \lambda + y - 2\lambda + z - 3\lambda = 0$ i.e. $\lambda = \frac{1}{6}(x+y+z)$.
Donc $u_L = \frac{1}{6}.(x+y+z)(1,2,3)$ et $u_H = (x,y,z) - \frac{1}{6}(x+y+z)(1,2,3)$.
Synthèse : Posons $u_L = \frac{1}{6}.(x+y+z)(1,2,3)$ et $u_H = (x,y,z) - \frac{1}{6}(x+y+z)(1,2,3)$.
On a $u_L \in L, u_H \in H$ et $u = u_L + u_H$.
Conclusion : $H \oplus L = \mathbb{R}^3$.
De plus, tout élément $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se décompose de façon unique comme un élément de H plus un élément de L de la façon suivante :

$$(x,y,z) = \underbrace{(x,y,z) - \frac{1}{6}(x+y+z)(1,2,3)}_{\in H} + \underbrace{\frac{1}{6}(x+y+z)(1,2,3)}_{\in L}$$

On note s la symétrie par rapport à H parallèlement à L.
$s\left((x,y,z)\right) = (x,y,z) - \frac{1}{6}(x+y+z)(1,2,3) - \frac{1}{6}(x+y+z)(1,2,3) = \frac{1}{3}(2x-y-z, -2x+y-2z, -3x-3y)$.

Exercice 18: On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$F = \{f \in E \,/\, f'' = f\} \qquad\qquad G = \{f \in E \,/\, f(0) = f'(0) = 0\}$$

1. $F = \text{Vect}(x \mapsto \mathbf{e}^x, x \mapsto \mathbf{e}^{-x})$ et $G \subset E$, $0 \in G$. Par ailleurs, pour tout f,$g \in G$, $(f+\lambda g)(0) = f(0)+\lambda g(0) = 0$ et $(f+\lambda g)'(0) = f'(0) + \lambda g'(0) = 0$. Donc $f + \lambda g \in G$. D'où F et G sont deux sev de E.

2. La famille $(x \mapsto \mathbf{e}^x, x \mapsto \mathbf{e}^{-x})$ est une base de F.

3. Soit $f \in E$.
   Analyse : Supposons qu'il existe $f_F \in F$ et $f_G \in G$ tels que $f = f_F + f_G$. Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_F : x \mapsto \lambda\mathbf{e}^x + \mu\mathbf{e}^{-x}$. De plus, $f_G = f - f_f$, en évaluant f_G et f'_G en 0, on obtient :

   $$0 = f(0) - \lambda - \mu \quad \text{et} \quad 0 = f'(0) - \lambda + \mu$$

   D'où $\lambda = \frac{f(0)+f'(0)}{2}$ et $\mu = \frac{f(0)-f'(0)}{2}$.
   Synthèse : Posons $f_F =: x \mapsto \frac{f(0)+f'(0)}{2}\mathbf{e}^x + \frac{f(0)-f'(0)}{2}\mathbf{e}^{-x}$ et $f_G : x \mapsto f(x) - \frac{f(0)+f'(0)}{2}\mathbf{e}^x - \frac{f(0)-f'(0)}{2}\mathbf{e}^{-x}$.
   On a :

   - $f''_F = f_F$ donc $f_F \in F$.
   - $f_G(0) = 0$ et $f'_G(0) = 0$ donc $f_G \in G$.
   - $f = f_F + f_G$.

   Conclusion : $\forall f \in E, \exists!(f_F, f_G) \in F \times G, f = f_F + f_G$ c'est-à-dire que F et G sont supplémentaires dans E.

4. Pour tout $f \in E$, $\pi(f) : x \mapsto \frac{f(0)+f'(0)}{2}\mathbf{e}^x + \frac{f(0)-f'(0)}{2}\mathbf{e}^{-x}$.

Exercice 19: Tout d'abord, puisque $u^3 = 0$, on peut montrer que on obtient que $\text{Im}(u^2) \subset \text{Ker}(u)$.
Donc, $\text{rg}(u^2) \leqslant \dim(\text{Ker}(u))$. Puis,

$$\begin{array}{rcl} \text{rg}(u^2) & \leqslant & \dim(\text{Ker}(u)) \\ \text{rg}(u^2) + \text{rg}(u) & \leqslant & \dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u) \\ \text{rg}(u) + \text{rg}(u^2) & \leqslant & \dim(E) \end{array}$$

où la dernière inégalité est obtenue en appliquant le théorème du rang à u.

Exercice 20:

1. Puisque $g \circ f = 0$, on a $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ donc $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(g))$.
   Par le théorème du rang appliqué à g, on obtient : $\mathrm{rg}(g) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(g))$.
   En utilisant l'inégalité, on obtient : $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E) - \mathrm{rg}(g)$ ou encore $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant \dim(E)$.

2. Soient f et g quelconques. Soit $x \in \mathrm{Im}(f+g)$.
   $$\exists y \in E \text{ tel que } (f+g)(y) = x \Rightarrow x = f(y) + g(y)$$
   Donc, $x \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Donc, $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Par les dimensions, $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

3. Puisque $f+g$ est bijective, on a $\mathrm{Im}(f+g) = E$ donc $\mathrm{rg}(f+g) = \dim(E)$.
   La question précédente s'écrit donc $\dim(E) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
   Par double inégalité, $\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Exercice 21: Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient f et g deux endomorphismes de E tels que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)$.
D'après les hypothèses et la formule de Grassmann, on a

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \geqslant \dim(E) \text{ et } \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g)) \geqslant \dim(E)\,.$$

En utilisant le théorème du rang sur la deuxième inégalité, on obtient $\dim(E) - \mathrm{rg}(f) + \dim(E) - \mathrm{rg}(g) \geqslant \dim(E)$ i.e. $\dim(E) \geqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$. Conclusion : $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E)$
De même, on obtient $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(E)$. D'après la caractérisation des supplémentaires en dimension finie (2 propriétés sur 3), les sommes ci-dessus sont des sommes directes.

Exercice 22:
Soit $(E_1) : \begin{cases} x+y+z & = 1 \\ 2x - y + 3z & = 2 \\ 3x - 3y + 5z & = 3 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
En posant $f : (x,y,z) \mapsto (x+y+z, 2x-y+3z, 3x-3y+5z)$, on a que $(E_1) : f(x,y,z) = (1,2,3)$.
On remarque que $(1,0,0)$ est solution particulière.
Par ailleurs, par le calcul, on trouve que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left((-4,1,3)\right)$.
Donc l'ensemble des solutions de (E_1) est $\{(1-4t, t, 3t), t \in \mathbb{R}\}$.

Soit $(E_2) : y'' - y = \mathrm{ch}(x)$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Posons Ψ l'application linaire suivante :

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f'' - f \end{array} \right. ,$$

alors $(E_2) : \Psi(y) = \mathrm{ch}$. De plus, $x \mapsto \frac{1}{2}\, x\,\mathrm{sh}(x)$ est une solution particulière de (E_2).
Cette solution particulière a été trouvé grâce aux méthodes vues dans le chapitre équations différentielles
Par ailleurs, $\mathrm{Ker}(\Psi) = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathbf{e}^x, x \mapsto \mathbf{e}^{-x})$ d'après le théorème de résolution des équations différentielles linéaires homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Donc l'ensemble des solutions de (E_2) est $\left\{x \mapsto \lambda \mathbf{e}^x + \mu \mathbf{e}^{-x} + \frac{1}{2}\, x\,\mathrm{sh}(x),\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Pour la dernière équation, on cherche l'ensemble $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \middle| \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + 2u_n = -2\right\}$.
Posons Φ l'application linaire suivante :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+2} + 2u_{n+1} + 2u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right. .$$

Alors $(E_3) : \Phi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (-2)_{n\in\mathbb{N}}$. On cherche une solution particulière sous la forme d'une suite constante. On trouve que $(\frac{-2}{5})_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de E_3. Par ailleurs, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \middle| \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + 2u_n = 0\right\}$.
On va utiliser le théorème d'expression des suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

On considère $(E_c) : r^2 + 2r + 2 = 0$ de discriminant -4.
Les solutions de (E_c) sont $-1 - \mathbf{i} = \sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $-1 + \mathbf{i} = \sqrt{2}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{3\pi}{4}}$. Donc

$$\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathrm{Vect}\left(\left((\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left((\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

Conclusion, l'ensemble recherché est :

$$\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \middle| \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\sqrt{2})^n \left(\lambda \cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + \mu \sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\right) - \frac{2}{5}\right\}$$

Exercice 23: Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.

Soit $\varphi : \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)) \end{array}\right.$.
Cette application est linéaire. De plus, un élément du noyau est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui s'annule en $n+1$ racines distinctes, c'est donc le polynôme nul.
On a alors $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$, donc φ est injective et, par un argument de dimension, φ est bijective.
Conclusion : pour tout $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![0; n]\!]$, $P(a_i) = b_i$.

Exercice 24: Posons $\varphi : \left\{\begin{array}{l} \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{array}\right.$.
L'application φ est une forme linéaire non nulle.
On a $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ donc H est un hyperplan de $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$.
Pour trouver un supplémentaire de l'hyperplan H, il suffit de choisir un vecteur $v \notin H$ et de prendre la droite $D = \mathrm{Vect}(v)$.
Donc $D = \mathrm{Vect}(x \mapsto 1)$ est un supplémentaire de H.